ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

M

Concours d'Admission 1976

Quatre pages dactylographiées

MATHEMATIQUES I

On désigne par $\mathcal{F}_1$ *l'espace vectoriel complexe des applications (ou fonctions) du corps des réels* $\mathbb{R}$ *dans le corps des complexes* $\mathbb{C}$, *par* $\mathcal{F}_2$ *l'espace vectoriel complexe des applications (ou fonctions) de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{C}$.

Etant donné un élément (f, a) *de* $\mathcal{F}_2 \times \mathbb{R}$, *on note* $f(a,.)$ [*respectivement* $f(.,a)$] *l'élément de* $\mathcal{F}_1$ *défini par*

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(a,x)$ [*respectivement* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,a)$].

Etant donné un élément f *de* $\mathcal{F}_2$, *on désigne par* $\mathcal{D}(f)$ [*respectivement* $\mathcal{G}(f)$] *le sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}_1$ *dont une famille génératrice est* $\left(f(a,.)\right)_{a \in \mathbb{R}}$ [*respectivement* $\left(f(.,a)\right)_{a \in \mathbb{R}}$].

Les parties II et III sont indépendantes, mais la partie III (option M) utilise la notation $\mathcal{E}(f)$ *vue dans la partie II.*

I

1°) *Soit* f *un élément de* $\mathcal{F}_2$.

a) *On suppose* $\mathcal{D}(f)$ *de dimension finie* ℓ *strictement supérieure à 0. Montrer qu'il existe* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathcal{F}_1^\ell$ *et* $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ *tels que l'on ait :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=\ell} \alpha_i(x)\, f(a_i, y)$.

b) *Démontrer que* $\mathcal{D}(f)$ *et* $\mathcal{G}(f)$ *sont simultanément soit de dimension finie (et que dans ce cas ils ont même dimension), soit de dimension infinie. Cette dimension commune, finie ou infinie, est notée* $r(f)$; *on l'appelle rang de* f.

On montrera que $r(f) = 0$ *caractérise la fonction nulle.*

2°) a) *Soit* $f \in \mathcal{F}_2$ *et* $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. *On pose, pour tout élément* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$, $g(x,y) = e^{px+qy} f(x,y)$. *Montrer que l'on a* $r(g) = r(f)$.

b) *Quel est le rang de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = P(x+y)$, *où* P *est un polynôme non nul de* $\mathbb{C}[X]$, *de degré* n ?

c) *Quel est le rang de* f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = e^{xy}$?

3°) *On désigne par* Φ *le sous-ensemble des fonctions de* $\mathcal{F}_2$ *de rang fini et par* Φ^* *cet ensemble* Φ *privé de la fonction nulle.*

.../...

a) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

Ⓐ $f \in \Phi$

Ⓑ Il existe au moins un entier n strictement positif et $2n$ fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots v_n$, éléments de $\mathcal{F}_1$ tels que l'on ait :

① $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(x)\, v_i(y).$$

Φ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_2$. Une relation telle que ① constituera une décomposition de f, et n sera la longueur de cette décomposition.

b) Montrer que la plus petite longueur d'une décomposition d'un élément f de Φ^* est égale à $r(f)$. Toute décomposition de f de longueur $r(f)$ sera dite minimale.

c) Etablir que si la relation ① est une décomposition minimale pour $f \in \Phi^*$, alors $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sont respectivement des bases de $\mathcal{G}(f)$ et $\mathcal{D}(f)$.

d) Montrer que si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ sont des systèmes libres dans $\mathcal{F}_1$, la relation ① représente une décomposition minimale de f.

e) Démontrer que, la relation ① étant minimale, pour que la relation

② $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} s_i(x)\, t_i(y)$$

soit aussi minimale, il faut et il suffit qu'il existe, dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes, une matrice A régulière telle que l'on ait :

③ $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \\ \vdots \\ s_n(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t_1(y) \\ t_2(y) \\ \vdots \\ t_n(y) \end{pmatrix} = \left({}^tA\right)^{-1} \begin{pmatrix} v_1(y) \\ v_2(y) \\ \vdots \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

(${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A)

4°) Démontrer que si f est de classe m, dans toute décomposition minimale telle que ①, les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont de classe m.

5°) On suppose que f est une fonction polynôme en x et y, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, que l'on peut écrire

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{i=k} P_i(x)\, y^i = \sum_{j=0}^{j=h} Q_j(y)\, x^j = (1 \; y \; \ldots \; y^k)\, M \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^h \end{pmatrix},$$

.../...

où les P_i et Q_j sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et M une matrice complexe. Démontrer que le rang de f est égal au rang du système $(P_0, P_1, \ldots P_k)$, au rang du système $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_R)$, et au rang de la matrice M.

II

On suppose que l'élément f de Φ est une fonction symétrique, c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = f(y,x)$. $\mathcal{G}(f)$ et $\mathcal{D}(f)$ se confondent alors en un même sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_1$ noté $\mathcal{E}(f)$.

1°) a) Montrer qu'il existe une matrice A symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et une seule, telle que l'on ait :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \ldots u_n(x) \end{pmatrix} A \cdot \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ \vdots \\ u_n(y) \end{pmatrix}$$

b) En déduire qu'il existe une décomposition minimale de f de la forme

$$④ \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(x)\, w_i(y) .$$

2°) Déterminer, pour la fonction polynôme f définie par

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (x+y)^m$, m entier strictement positif,

une décomposition minimale telle que ④.

III (OPTION M)

Soit $\mathcal{A}$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{F}_1$ formé des fonctions g de $\mathcal{F}_1$ de classe infinie et possédant la propriété suivante : la fonction f de $\mathcal{F}_2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = g(x+y)$ est de rang fini, qui sera par définition celui de g. $\mathcal{E}(f)$ sera alors également noté $\mathcal{E}(g)$.

1°) Déterminer les fonctions g de $\mathcal{A}$ de rang 1. On montrera qu'une telle fonction ne prend jamais la valeur zéro.

2°) a) Montrer que la fonction g de $\mathcal{F}_1$, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{\alpha x} P(x)$, P étant un polynôme non nul à coefficients complexes de degré p et α un élément de $\mathbb{C}$, appartient à $\mathcal{A}$, et est de rang $p+1$.

b) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ désignant k nombres complexes distincts, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ désignant des polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$, on considère la fonction h de $\mathcal{F}_1$ définie par

$$⑤ \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \sum_{i=1}^{i=k} e^{\alpha_i x} P_i(x)$$

.../...

Etablir que h *appartient à* $\mathcal{A}$ *et que son rang est égal à* $\sum_{i=1}^{i=k} q_i$ *, avec :*

$\forall\ i = 1, 2, \ldots, k \qquad q_i = 1 + \text{degré}\ (P_i)$.

(On pourra utiliser la propriété suivante après l'avoir justifiée : si, pour tout x *réel, les* k *polynômes* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ *de* $\mathbb{C}[X]$ *satisfont à la relation* $\sum_{i=1}^{i=k} e^{\alpha_i x} Q_i(x) = 0$, *alors ils sont tous nuls.)*

3°) *Soit* $g \in \mathcal{A}$, g *de rang* $p > 1$. *On considère une décomposition minimale*

$$g(x+y) = \sum_{i=1}^{i=p} u_i(x)\ v_i(y) .$$

a) *Montrer que l'on a :* $g' \in \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{E}(g') \subset \mathcal{E}(g)$. *(*$g'$ *est la dérivée de* g*).*

b) *Montrer qu'il existe un complexe* α *, éventuellement nul, tel que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto e^{\alpha x}\left[g'(x) + \alpha\, g(x)\right]$ *soit un élément de* $\mathcal{A}$ *de rang strictement inférieur à* p.

c) *En déduire que toute fonction* g *de* $\mathcal{A}$ *est de la forme* ⑤ .
Soit $g \in \mathcal{F}_1$, g *continue et telle que la fonction de* $\mathcal{F}_2$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $(x,y) \mapsto g(x+y)$ *soit de rang fini. Démontrer que* g *est de classe infinie. (On pourra considérer une primitive de* g*).*

F I N

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail